# ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ

УДК 51.74

**К. С. Мусабеков**

*Кокшетауский университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, Казахстан*

## МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА» В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

*Аннотация*. В данной работе приводится метод изложения действительного числа как бесконечной десятичной дроби. Показана несоизмеримость единичного отрезка с отрезком, имеющим длиной иррациональное число.

*Ключевые слова:* высшая математика, рациональные числа, иррациональные числа, действительные числа, периодическая десятичная дробь, бесконечная десятичная дробь, соизмеримые отрезки.

Среди предметов естественного цикла, главную роль в подготовке современного инженера или военного играет математическая подготовка, цель которой – научить студента свободному владению необходимым аппаратом современной математики. Добавим к этому, что имеется сильная конкуренция между государствами, и может быть хорошая математическая подготовка наших специалистов позволит нашей стране, хотя бы не сильно отставать от других развитых стран.

В условиях рынка особенно необходимо владеть навыками решения практических задач науки и техники. В связи с этим наравне с теоретической подготовкой студентов необходима и практическая подготовка. В связи с этим основными задачами учебных занятий по курсу математического анализа технического вуза являются:

1. придерживаясь принципа «от простого к сложному» обучать методам решения достаточного количества типовых задач, что позволит запомнить метод решения и соответствующую теорию;

2. развивать логическое мышление обучаемых, научиться применять математические методы к решению практических задач;

3. прививать навыки самообразования.

Для решения поставленных трех задач требуется выполнение следующих шагов.

1. Создать хорошее методическое обеспечение курса, т.е. создать учебно-методические пособия, методические указания, связанные с будущей специальностью обучающихся. В курсе математического анализа имеется много

достаточно трудных для усвоения тем, например «Вещественные числа», «Предел функции» и т. д. Поэтому в данной работе в качестве методической разработки, подробно рассматриваются отдельные моменты темы «Вещественные числа».

2. Добиваться от студентов своевременного выполнения всех заданий, контрольных работ, посещения лекций и консультаций.

3. Преподаватель должен вести занятия от начала курса обучения до его завершения (возможно предмет рассчитан на два и более семестра). Это позволяет:

во-первых, повысить ответственность преподавателя за свою работу;

во-вторых, обучающиеся привыкают к стилю преподавателя объяснять учебный материал и это способствует улучшению качества усвоения.

Теперь перейдем от общих задач подготовки студентов к методике преподавания математики.

В курсе математики средней школы теория действительных чисел в полной мере не изучается, излагаются и доказываются лишь отдельные факты. Поэтому более подробное ознакомление с этой теорией предстоит в курсе высшей математики вуза, точнее, в курсе математического анализа.

Основными понятиями курса математического анализа являются число, функция и предел. Все эти понятия между собой тесно связаны. В этой работе рассмотрим вопросы, относящиеся к методике обучения теме «Вещественные числа».

Студенты умеют работать с рациональными числами, но их знания по иррациональным числам чаще всего ограничены и нет четкого понимания теории иррациональных чисел, не знают, как выполнять арифметические операции над иррациональными числами. Известно, что если считать количество (обычно называют мощностью) рациональных чисел на числовой прямой составляет $\aleph_0$, то количество (мощность) иррациональных чисел составляет $2^{\aleph_0}$. На самом деле $\aleph_0$ -это бесконечно большое число (бесконечность), поэтому иррациональных чисел будет намного больше чем рациональных.

При формулировке определения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ обычно приводят следующие слова: если каждому значению переменной $x \in [a,b]$ по определенному закону (или правилу) поставлено в соответствие вполне определенное значение переменной $y$, то говорят, что на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Тогда, если большинство точек отрезка $[a,b]$ составляют иррациональные числа, о которых студенты имеют смутное представление, то ясно что и понятие функции студенты усвоят формально, не вникая в суть дела. Аналогичная ситуация будет и с другими понятиями (предел, производная, интеграл) курса математического анализа. Все это приводит к мысли о необходимости более тщательного изучения темы «Вещественные числа», поскольку эта тема является основой курса математического анализа.

Знакомство с теорией вещественных чисел можно начинать с понятия числовой оси. Это понятие используется и в геометрии при рассмотрении прямоугольной декартовой системы координат. При этом можно последовательно ввести множества $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ натуральных чисел, множества $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$ целых чисел как целочисленные координаты точек числовой оси и связать эти множества соотношением $N \subset Z$.

Затем рассматривая на числовой оси точки расположенные между точками с целочисленными координатами приходим к необходимости введения рациональных чисел как координат таких точек числовой оси. Рациональные числа определяются как отношение $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$. Множество рациональных чисел обозначается символический

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$. Теперь можно показать включение $N \subset Z \subset Q$.

Здесь можно напомнить обучающимся известное из школьной математики понятие о соизмеримости отрезков с рациональными длинами, и пользуясь теоремой Фалеса (5 век до н. э.) показать, как древние греки строили отрезки с длинами в рациональных числах. Далее будет подробнее сказано о теореме Фалеса и понятии соизмеримости отрезков.

Чтобы показать, что на числовой оси, кроме точек с рациональными координатами имеются точки координаты которых не описываются рациональными числами, рассмотрим квадрат со стороной равной 1. Тогда диагональ квадрата равна $\sqrt{2}$. Здесь же можно показать, что число $\sqrt{2}$ не выражается через рациональное число, т.е. это число не является рациональным числом и носит название иррационального числа. Таким образом, установили существование иррациональных чисел, являющихся также координатами точек числовой оси. Обучающимся сообщается, что объединение рациональных и иррациональных чисел называется множеством вещественных (действительных) чисел и символический обозначается буквой $R$. Таким образом, имеется включение $N \subset Z \subset Q \subset R$.

В конечном итоге делается вывод: между точками числовой оси и вещественными числами устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Если теория рациональных чисел доступна и понятна, то в теории иррациональных чисел не все ясно. Поэтому, чтобы прояснить этот вопрос, перейдем к более подробному рассмотрению теории вещественных чисел.

Иррациональные числа были открыты в школе Пифагора (5 век до н.э.). И лишь в конце 19 века эта теория оформилась к виду, который мы имеем сегодня. Почти одновременно в работах К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда и Г. Кантора были созданы три эквивалентные точки зрения на понятие вещественного числа.

1. Карл Вейерштрасс (1815-1897) рассматривал действительное число как сумму бесконечного десятичного ряда.
2. Рихард Дедекинд (1831-1916) построил действительное число как сечение во множестве рациональных чисел.
3. Георг Кантор (1848-1916) построил действительное число как предел фундаментальной последовательности рациональных чисел.

Курс математического анализа на основе идей К. Вейерштрасса построен в работах [1, 2]. На основе идей Р. Дедекинда учебник математического анализа создан Г. М. Фихтенгольцем [3].

Для студентов технических вузов наиболее подходящим для практических применений являются подходы К. Вейерштрасса и Г. Кантора.

Определение. Действительным (вещественным) числом называется бесконечная десятичная дробь

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$-целые неотрицательные числа, $0 \le a_n \le 9, (n > 0).$ Число $a_0$ называется целой частью действительного числа $x$ и обозначается символический $[x],$ т.е. $a_0 = [x]$ (читается антье $x$), $[x] \le x < [x]+1.$

Число $x - [x] = 0, a_1 a_2 ... a_n ...$ называется дробной частью числа $x$ и символический обозначается $\{x\}$. Таким образом $x = [x] + \{x\}.$

В практических вычислениях бесконечные десятичные дроби заменяются их приближенными значениями по недостатку и по избытку. Рассмотрим действительное число

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ....$$

Приближенным значением по недостатку числа $x$ называют конечную десятичную дробь

$$x_n = a_0, a_1 a_2 ... a_n,$$

а приближенным значением числа $x$ по избытку называют десятичную дробь

$$\overline{x_n} = x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Поэтому здесь выполняется неравенства $x_n \le x \le \overline{x_n},$ для всех $n \ge 1.$ Отсюда следует, что с увеличением номера $n$, $\overline{x_n} - x_n = \frac{1}{10^n} \to 0,$ при $n \to \infty.$ Тогда $x_n \to x, \overline{x_n} \to x$ при $n \to \infty.$ Числа $x_n, \overline{x_n}$ являются рациональными. Поэтому действительное число $x$ является пределом последовательностей рациональных чисел. Это означает, что каждое действительное число может быть представлено приближенно с любой степенью точности рациональным числом.

С понятием действительного числа тесно связано понятие периодичности и не периодичности десятичных дробей. Здесь можно рассмотреть примеры рациональных чисел $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{7}{15}.$ Разделив числитель на знаменатель получим примеры периодических десятичных дробей:

$$\frac{1}{3} = 0,33... = 0,(3); \frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,(285714); \frac{7}{15} = 0,466... = 0,4(6).$$

Далее приводится следующее определение.

Определение. Бесконечная десятичная дробь (1) называется периодической десятичной дробью (кратко пд-дробью), если существуют такие натуральные числа $k$ и $p$, что

$$a_{n+p} = a_n, \text{ для всех } n \ge k. \quad (2)$$

Будем считать числа $k$ и $p$ в равенстве (2) наименьшими. Число $p$ называется длиной периода, упорядоченная последовательность цифр

$a_k a_{k+1}...a_{k+p-1}$ называется периодом пд-дроби $x$. Периодическая десятичная дробь обозначается

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1}(a_k a_{k+1} ... a_{k+p-1}). \qquad (3)$$

Если в (3) $k=1$ то $x = a_0,(a_1 a_2 ... a_p)$ называется чистой пд-дробью. Если в (3) $k \ge 2,$ то $x$ называется смешанной пд-дробью. В этом случае упорядоченная последовательность цифр $a_1 a_2 ... a_{k-1}$ называется числом стоящим до периода. Рассмотренные выше дроби $0,(3); 0,(285714)$ являются чистыми пд-дробями, а дробь $0,4(6)$ будет смешанной пд-дробью.

Если период пд-дроби состоит из нуля, т.е. $x = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1}(0), k \ge 1$ то $x$ считается конечной десятичной дробью.

Здесь нетрудно доказать, что если знаменатель $n$ дроби $\frac{m}{n}$ имеет вид $n = 2^s \cdot 5^l$ (где $s, l$ - неотрицательные целые числа), то десятичная дробь будет конечной, т.е. $\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 ... a_q.$ Рассматривая пример дроби $\frac{3}{200}$ здесь имеем $200 = 2^3 \cdot 5^2,$ поэтому $\frac{3}{200} = 0,015.$

Для того чтобы установить взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и периодическими десятичными дробями приведем следующие утверждения доказательства которых нетрудно провести.

Теорема 1. Всякое рациональное число обращается в периодическую десятичную дробь.

Теорема 2. Чистая периодическая десятичная дробь $0,(a_1 a_2 ... a_p)$ равна обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду $a_1 a_2 ... a_p,$ а знаменатель есть число состоящее из $p$ -девяток, где $p$ -длина периода:

$$0,(a_1 a_2 ... a_p) = \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_p}}{99...9}. \qquad (4)$$

Теорема 3. Смешанная периодическая десятичная дробь $a_0, a_1 a_2 ... a_k (a_{k+1} ... a_{k+p})$ равна обыкновенной дроби, числитель которой есть разность между числом, стоящим между запятой и вторым периодом и числом стоящим до периода

$$\overline{a_1 a_2 ... a_k a_{k+1} ... a_{k+p}} - \overline{a_1 a_2 ... a_k}.$$

Знаменатель есть число $99...90...0$ состоящее из $p$-девяток ( $p$ -длина периода), $k$ - нулей ( $k$ -число десятичных знаков до периода), $k \ge 1,$

$$0, a_1 ... a_k (a_{k+1} ... a_{k+p}) = \frac{\overline{a_1 ... a_k a_{k+1} ... a_{k+p}} - \overline{a_1 ... a_k}}{99...90...0}. \qquad (5)$$

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема 4. Между неравными нулю рациональными числами и бесконечными десятичными не равными нулю периодическими дробями имеется взаимно однозначное соответствие.

Число $0$ можно записать в следующем виде $0 = 0,0...0...$.

Покажем применение формул (4) и (5). Для этого преобразуем пд-дроби $0,(285714)$ и $0,4(6)$ в обыкновенные дроби:

$$0,(285714) = \frac{285714}{999999} = \frac{31746}{111111} = \frac{2}{7}, \quad 0,4(6) = \frac{46-4}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}.$$

Преобразование пд-дроби в обыкновенную дробь кроме формул (4), (5) можно осуществлять и непосредственно пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Идею сказанного покажем на конкретном примере

$$0,(36) = 0,363636... = \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000} + ... = \frac{36}{100}(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + ...)$$
$$= \frac{36}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{36}{100}\frac{100}{99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11},$$

т. е. $(0,36) = \frac{4}{11}$.

Теперь вернемся к определению вещественного числа как бесконечной десятичной дроби. По теореме 4, периодические десятичные дроби являются рациональными числами. Поэтому на долю иррациональных чисел остаются непериодические десятичные дроби.

Определение. Бесконечная десятичная дробь называется непериодической, если она не удовлетворяет равенству (2) ни для каких натуральных чисел $k, p$.

Дробь $x = 0{,}101101110...$ непериодическая (после каждого нуля число единиц увеличивается на одно).

Определение. Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая десятичная дробь

$$x = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

где $a_0 -$ целое неотрицательное число, $a_k -$ цифры $0,1,2,...,9, (k = 1,2,...)$.

Доказано, что $\pi, e -$ являются иррациональными числами.

Как отмечено выше, каждое действительное (а значит и иррациональное) число $x$ является пределом последовательностей рациональных чисел. Таким образом, иррациональное число может быть представлено приближенно с любой степенью точности рациональным числом.

Например, иррациональное число $e = 2,718281828459045...$ являющаяся основанием натуральных логарифмов определяется по формуле $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Здесь $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ рациональные числа, $n = 1,2,...$.

Перейдем теперь к понятию соизмеримости отрезков. Это понятие связано с вопросом существования общей меры измерения двух отрезков.

Определение. Общей мерой двух отрезков называется наибольший из таких отрезков, который укладывается в каждом из данных отрезков целое число раз.

Пусть даны отрезки $AB, CD.$ Если имеется отрезок который уложится $m-$ раз на отрезке $AB,$ и $n-$раз на отрезке $CD,$ то этот общий масштабный отрезок и будет общей мерой для $AB$ и $CD.$ При этом отрезки $AB$ и $CD$будут находиться в отношении $\frac{m}{n}.$ Заметим что отрезки $AB$ и $CD$находятся в этом же отношении и при любом другом масштабе.

Определение. Отрезки, имеющие общую меру измерения, называются соизмеримыми.

Приведем еще теорему Фалеса (625-547 г до н.э.), с помощью которой греки могли устанавливать соизмеримость отрезков с длинами в рациональных числах.

Теорема Фалеса [4]. Если на одной прямой отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные отрезки.

Для примера, приведем алгоритм построения отрезка с длиной $\frac{3}{5}.$

1-шаг. Рассмотрим некоторый острый угол образованный лучами $l_1, l_2.$ Вершину угла обозначим буквой $O.$

2-шаг. На луче $l_1$ отложим единичный отрезок $OE.$

3-шаг. На луче $l_2$, начиная с точки $O$отложим $5$ равных отрезков $OM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5.$

4-шаг. Соединяем точку $M_5$с точкой $E.$

5-шаг. Проведем через точку $M_3$ прямую $M_3O_1$ параллельную $M_5E$ где $O_1 = M_3O_1 \cap OE.$ Тогда по теореме Фалеса, отрезок $OO_1$имеет длину $\frac{3}{5}.$

В рассматриваемом случае общей мерой отрезков с длинами 1 и $\frac{3}{5}$ оказался отрезок длиной $\frac{1}{5} = 0,2.$

Чтобы показать несоизмеримость отрезков имеющих длину равную иррациональному числу рассмотрим следующий пример.

Пусть необходимо построить отрезок длиной $0,53-$это рациональное число. Чтобы построить этот отрезок, мы делим единичный отрезок на 100 равных частей (например, по методу Фалеса) и тогда на единичном отрезке получим отрезок с длиной $0,01$. Это и будет общей мерой между единичным отрезком и отрезком с длиной $0,53$. Затем откладывая на единичном отрезке, от точки $O$отрезок $0,01$ $53$раз мы построим искомый отрезок.

Если же мы рассмотрим отрезок имеющий длину в иррациональных числах, например $\sqrt{2}-$диагональ квадрата со стороной равной единице, то$\sqrt{2} = 1,41421...$ и здесь нет наименьшего разряда (в случае предыдущего примера был наименьший разряд $0{,}01$ ), поэтому в случае отрезка длиной $\sqrt{2}$ не будет общей меры с единичным отрезком, т.е. отрезок длиной $\sqrt{2}$ несоизмерим с единичным отрезком. Совершенно аналогично устанавливается несоизмеримость единичного отрезка с другими отрезками имеющими длину в иррациональных числах.

*Выводы.*

1. Предложен метод преподавания вещественных чисел в форме бесконечных десятичных дробей, доступный для усвоения и удобный для практического применения.

2. В соответствии с предложенным методом преподавания вещественного числа, показана несоизмеримость единичного отрезка с отрезком, имеющим длину, выраженную в иррациональных числах.

## Список литературы

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика, 2, дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.
2. Никольский С. М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
4. Каазик Ю. Я. Математический словарь. – Таллин: Валгус, 1985. – 296 с.
5. Земсков В. Н., Лесин В. В., Поспелов А. А., Прокофьев А. А., Соколова Т.В. Сборник задач по высшей математике, часть 1. – М: Юрайт, 2011. – 605 с.

## References

1. Bugrov YA. S., Nikol'skij S. M. Vysshaya matematika, 2, differencial'noe i integral'noe ischislenie. – M.: Drofa, 2003. – 512 s.
2. Nikol'skij S. M. Kurs matematicheskogo analiza. – M.: Nauka, 1983. – 464 s.
3. Fihtengol'c G. M. Osnovy matematicheskogo analiza. – M.: Nauka, 1968. – 464 s.
4. Kaazik YU. YA. Matematicheskij slovar'. – Tallin: Valgus, 1985. – 296 s.
5. Zemskov V. N., Lesin V. V., Pospelov A. A., Prokof'ev A. A., Sokolova T. V. Sbornik zadach po vysshej matematike, chast' 1. – M: YUrajt, 2011. – 605 s.

К. С. Мусабеков

*Ш. Уалиханов атынғы Кокшетау университеті, Көкшетау, Қазақстан*

ТЕХНИКАЛЫҚ ЖОО-ДА "НАҚТЫ САНДАР" ТАҚЫРЫБЫН ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ

*Аңдатпа.* Бұл жұмыста нақты санды шексіз ондық бөлшек ретінде ұсыну әдісі келтірілген. Ұзындығы иррационал сан болатын кесіндінің бірлік кесіндімен өлшемсіздігі көрсетілген.

*Түйінді сөздер:* жоғары математика, рационал сандар, иррационал сандар, нақты сандар, периодты ондық бөлшек, шексіз ондық бөлшек, өлшемдес кесінділер.

K. S. Mussabekov

*Kokshetau University named Sh. Ualikhanov, Kokshetau, Kazakhstan*

TEACHING METHOD OF THE SUBJECT «REAL NUMBERS» IN A TECHNICAL UNIVERSITY

*Abstract.* In the paper adduced the method of narration of a real number as a nonterminating decimal. Was shown incommensurability of a unit segment with the segment having length of an irrational number.

*Keywords:* calculus, rational numbers, irrational numbers, real numbers, periodic decimal, nonterminating decimal, commensurable segments.

**Авторлар туралы мәлімет / Сведения об авторах / Information about the authors**

*Калимулла Сұлтанұлы Мұсабеков* – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Шоқан Уәлиханов атындағы Көкшетау университетінің физика, математика және информатика кафедрасының доценті. Қазақстан, Көкшетау, Абай көшесі, 76. E-mail: it.kgu@mail.ru

*Мусабеков Калимулла Султанович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и информатики Кокшетауского университета имени Шокана Уалиханова. Казахстан, Кокшетау, ул. Абая, 76. E-mail: it.kgu@mail.ru

*Kalimulla Musabekov* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics, Mathematics and Computer Science of the Shokan Ualikhanov Kokshetau University. Kazakhstan, Kokshetau, 76 Abaya Street. E-mail: it.kgu@mail.ru